1033. 條件附確率法則ノ定義ニ就テ

伊藤　清（内閣統計局）

differential デナイ *stochastic process* ヲ研究スルニハ，條件附確率法則トイフ概念ガ極メテ重要デアル。コンデハソノ嚴密ナ定義ノ仕方ヲ述ベテ見ヨウト思フ。條件附確率ニツイテハ P. *Lévy*[1] ノ定義ガアリ，*Kolmogoroff*[2] ノ著ニモ載ッテヰルガ、ソレヲ基礎トシテ條件附確率法則ヲ定義スルコトハサ程無造作ニモ出來ナイト考ヘラレルノデ、ソレニ就テ述ベテ見ヨウト思フ。最初注意スベキコトヲノベル。

I. 確率變數ニ關スル「許サレル」概念構成ニ就テ

---

(1) P. *Lévy: Théorie de láddition des variables aleatoires* P. 68

(2) *Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinkeitsrechnung* P. 45

§1. 確率ノ場. Ω ヲ抽象空間トシ, F ヲ Ω ノ部分集合ノ加法族[3] トスル. P ヲ集合 (F)[4] ノ加法函數[5] デ, 且ツ

$$P(E) \geqq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

トスルトキ, P ヲ (Ω, F) ノ上ノ確率ト呼ブ. E ヲ Ω ノ任意ノ部分集合トスル時.

$$\overline{P}(E) = \sup\{P(E');\ E' \in F,\ E' \subset E\}$$

$$\underline{P}(E) = \inf\{P(E');\ E' \in F,\ E' \supset E\}$$

トシ, $\overline{P}(E) = \underline{P}(E)$ ノトキ, E ヲ P ー可測ト云ヒ, コノ共通ノ値ヲ再ビ $P(E)$ ト書クト, P ハ前ノ P ノ拡張ニナッテ才ル. $\Omega = F$, P ヲ結ビツケテ考ヘル時之ヲ確率ノ場ト云フ.

E_1, E_2 ヲ P ー可測集合トシ

$$P(E_1 \sim E_2) = 0$$

ノトキ, $E_1 \sim E_2$ ト定義シ, E_1 ト E_2 トハ同等ナリト呼ブ事ニスルト

$$E \sim E$$

$$E_1 \sim E_2 \longrightarrow E_2 \sim E_1$$

$$E_1 \sim E_2,\ E_2 \sim E_3 \longrightarrow E_1 \sim E_3$$

(3) S. Saks: Theory of the integral P. 7

(4) 集合 (F) トイフノハ集合族 F ニ属スル集合トイフ意ニ用ウルコトニスル.

(5) S. Saks: loc. cit. P. 8.

デアッテ「〜」ハ一種ノ equivalence relation ト考ヘ得ル。

§2. 確率変数. X ヲ抽象空間トシ、F_X ヲ X ノ部分集合ノ加法族トスル. 今 Ω ノ上ノ殆ンド到ル所 (P)[6] ニテ定義セラレタ X ノ上ノ値ヲトル函数 $x(\omega)$ ガアッテ、集合 (F_X) E ノ原像 $x^{-1}(E)$ ガ常ニ P-可測ナルトキ $x(\omega)$ ガ P-可測ト云ヒ、カヽル函数ヲ (Ω, F, P) 上ノ (X, F_X)-値ヲトル確率変数ト云フ。

ニツノ確率変数 x_1, x_2 ガアッテ、$P(x_1 = x_2) = 1$ ナルトキ、$x_1 \sim x_2$ トイフコトニスルト、「〜」ハ一種ノ equivalence relation デアル。同等ナ確率変数ハ区別シナイ方ガ妥当デアル。ソレ故確率変数ノ属性トシテハ同等ナ確率変数ニハ同ジ結果ヲ與ヘルモノノミガ「許サレル」。

$x^{-1}(E)$ 即チ $E\{\omega; x(\omega) \in E\}$ ヲ表ハスノニ $(x \in E)$ ナル命題ソノモノヲ以テスルコトガ conventional use ト一致スル。$E \in F_X$ ノトキ $\{x \in E\}$ ハ「許サレル」概念デアル。$x \sim x'$ ナラバ $\{x \in E\} \sim \{x' \in E\}$ ナル故。又 $P(x \in E)$ モ亦「許サレル」概念デアル。

§3. 確率変数ノ函数. x ヲ (Ω, F, P) 上ノ $(X\ F_X)$-値ヲトル確率変数トシ、f ヲ $(X\ F_X\ P_x)$ 上ノ殆ンド到ル所 (P_x) デ定義セラレタ $(Y\ F_Y)$-値ヲトル

(6)「P-測度0ノ例外ヲ除イテ」トイフコトヲ「殆ンド到ル所 (P) ニテ」トイフ。

P_xー可測ナ函数トスル。$f(x)$ ハ $(\Omega\ F\ P)$ 上ノ確率変数ト考ヘルコトガ出来ルガ、$x \sim x'$ (P)[17]，$f \sim f'$ (P_x) ナラバ $f(x) \sim f'(x')$ ナル故，$f(x)$ ハ「許サレル」概念デアル。

§4. 確率変数ノ結合． Aヲ可附番集合トシ、x_α $(\alpha \in A)$ ヲ夫々 $(X_\alpha\ F_\alpha)$-値ヲトル確率変数トスル。$\alpha \in A$ ニ対スル X_α ノ積空間ヲ X トシ、X ノ壔集合ヲ含ム最小ノ加法族ヲ F_X トスルト，$x \equiv (x_\alpha ; \alpha \in A)$ ハ (X, F_X)ー値ヲトル確率変数ト考ヘルコトガ出来ル。蓋シ x_α ノ定義サレナイ ω ノ集合ヲ N_α トシ、$\bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha = N$ トスレバ

$$P(N) \leqq \sum_{\alpha \in A} P(N_\alpha) = 0$$

（Aガ可附番集合ナルコトニ注意!!）

故ニ x ハ $\Omega - N$ デ即チ Ω ノ上ノ殆ンド到ル所 (P) ニテ定義サレテヰル。又 F_X ノ定義ニヨリ、ソノ P-可測性ハ明ラカデアル。又 $x_\alpha \sim x'_\alpha$ $(\alpha \in A)$ ナラバ $(x_\alpha ; \alpha \in A) \sim (x'_\alpha ; \alpha \in A)$ ナル故，$x_\alpha (\alpha \in A)$ カラ $(x_\alpha ; \alpha \in A)$ ヲ作ルコトハ「許サレル」概念構成デアル．コレヲ $x_\alpha (\alpha \in A)$ ノ結合ト呼ブコトニスル。結合ヲ作ル場合、Aガ可附番ナルコトガ決定的ナ役割ヲ演ジテ居ル。

後ニ非可附番個ノ確率変数ノ結合モ考ヘルガ、ソノ場合特別ナ條件ガ必要デアル。

§5. 確率変数ノ極限値

---

(17) $x \sim x'$ ハ P ニ関シテ $x \sim x'$ ノ意.

$x_1, x_2 \cdots\cdots$ 及ビ x ヲ或ル距離空間ノ値ヲトル確率変数トスル時

$$\bigwedge_{K=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigwedge_{n=m}^{\infty} \left\{ \rho(x_n, x) < \frac{1}{k} \right\}$$ ハ P－可測デアル。

ソノ確率ガ1ナル時ニ

" $x_1, x_2 \cdots\cdots$ ハ x ニ殆ンド確実ニ収斂スルトイヒ

$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ニテ表ハス"

$x_1 \sim x_1', x_2 \sim x_2', \cdots\cdots, x \sim x'$ デアルトキ、

$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ナラバ $x' = \lim_{n\to\infty} x_n$，又

$$P\left\{ \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{m=1}^{\infty} \bigwedge_{p,q>m} \left(\rho(x_p, x_q) < \frac{1}{k} \right) \right\} = 1$$

ナルトキ $x_1, x_2 \cdots\cdots$ ヲ殆ンド確実ニ収斂スル確率変数ト云フ。$x_1 \sim x_1', x_2 \sim x_2', \cdots\cdots$ ナラバ $x_1', x_2' \cdots\cdots$ モ亦殆ンド確實ニ収斂スル変数列トナル。而シテコノ時

$$\lim x_n = x$$

ナル x ガ必ズ存在シ、而モ equivalence ヲ除イテ一義的ニ定マル。殆ンド確実ニ収斂スル変数列ノ極限変数モ亦「許サレル」概念デアル。

任意ノ正数 ε ニ対シテ

$$P\{\rho(x_n, x) > \varepsilon\} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ノ時，x_n ハ x ニ確率収斂スルト云ヒ，

$$x = P\text{-}\lim x_n$$

ヲ表ハスコトニスル。$x_n \sim x'_n\ (n=1,2,\cdots\cdots)\ x \sim x'$ デ $\text{P-}\lim x_n = x$ ナラバ $\text{P-}\lim x'_n = x'$

次ニ

$$P\{\rho(x_m, x_n) > \varepsilon\} \longrightarrow 0 \quad (m, n \to \infty)$$

ナルトキ，$\{x_n\}$ ヲ確率収斂スル変数列トイフ。コノトキ $\text{P-}\lim x_n$ ナル x ハ必ズ存在シ且ツ equivalence ヲ除イテ一義的ニ定マル。

「確率収斂スルトイフ事」「確率収斂スル変数列ノ極限値」ハイヅレモ「許サレル」概念デアル。

収斂，極限値ノ定義ハ径数ガ有理数ノ場合ニモナサレ得ル。例ヘバ有理数 r ニ依存スル。確率変数 x_r ガアリ、S ヲ任意ノ実数トスルトキ $r \to S$ ニ対シテ x_r ガ収斂スルトイフノハ

$$P\left(\bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{\substack{|r-s|<\frac{1}{n} \\ |r'-s|<\frac{1}{n}}} \left(\rho(x_r, x_{r'}) < \frac{1}{k}\right)\right) = 1$$

トイフコトデアル。之ガ「許サレル」概念タル事ハ明カデアル。（有理数ガ可附番集合ナル事ニ注意!!）

II. 條件附確率法則

§1. 條件附確率　x ヲ (X, F_x) 一値ヲトル確率変数トシ，A ヲ Ω ノ P 一可測集合トスル。E ヲ P_x 一可測ナ任意ノ集合トスル時

$$P\{(x \in E) \cdot A\}$$

ハ E ノ加法函數デ

$$0 \leqq P\{(x \in E) \cdot A\} \leqq P\{x \in E\} = P_x(E)$$

故ニ X ノ上ノ上ノ始ンド到ル所 (P_x) デ定義セラレタ点函數 $\psi(\lambda)$ ガアッテ

$$P\{(x \in E) \cdot A\} = \int_E \psi(\lambda) P_x(d\lambda)$$

今 $\psi(x)$ ナル「確率変數 x ノ函數」ヲ考ヘ，之ヲ $P(A/x)$ ヲ表ハシ，x ノ定マッタトキ A ノ成立スル條件附確率ト云フ。

$$x \sim x' \qquad A \sim A'$$

ナラバ $P(A/x) \sim P(A'/x')$ ナル故，之ハ「許サレル」概念デアル。

§2. separable ナ加法族

Ω ノ上ノ集合ノ加法族 F ノ部分集合 G ヲ含ム最小ノ加法族 B(G) ガ F ト一致スルトキ，G ヲ F ノ base ト云フ事ニスル，F ガ enumerable base ヲモツトキ，F ヲ separable ト云フ。

今 0 ト 1 トノ間ノ有理数 r ニ依存スル F ノ元 E_r ガアッテ，$\Gamma = \{E_r\}$ ハ F ノ base デアリ，且ツ

(1) E_r ハ r ニ関シテ単調非減少

(2) $\lim_{r \to 1-} E_r = \Omega \qquad \lim_{r \to +0} E_r = 0$ （0 ハ空集合ヲ表ス）

(3) $\lim_{s \to r+} E_s = E_r$

ナルトキ，$\{E_r\}$ ヲ normal base ト云フ。v. Neu-